

Alle Aufgaben lassen sich ohne Taschenrechner lösen.

1 Substitution und partielle Integration

(i) Berechnen Sie die Stammfunktionen

a) $\frac{1}{e^{3x} + 5}$

c) $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{(1-x)^2}$

e) $\sin(4x) \sin(6x)$

b) $e^x \cos(x)$

d) $x^2 \ln(x)$

f) $\sin(x)e^{\cos(x)}$

Für Experten ...

g) $\frac{\sqrt{1+x}}{x}$

h) $\frac{1}{\sin(x)}$

(ii) Berechnen Sie $\int \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx$, indem Sie die folgenden Schritte befolgen.

a) Wenden Sie auf das Integral $\int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx$ die Formel für die partielle Integration an:

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx \text{ mit } v' = 1$$

b) Stellen Sie $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}$ durch $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n-1}}$ dar.

Hinweis: bei der Berechnung des Falles $n = 1$ kann eine Substitution $x = \tan(y)$ hilfreich sein.

2 Bestimmte und uneigentliche Integrale

(i) Berechnen Sie die Integrale.

a) $\int_{-2}^2 (x^3 - x) dx$

c) $\int_2^4 \frac{|x-3|}{x^2} dx$

e) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 1}$

b) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$

d) $\int_0^3 xe^{3x} dx$

f) $\int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx$

(ii) Lösen Sie das Integral mittels Substitution.

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 5} dx$$

(iii) Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale.

a) $\int_2^{11} \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$

b) $\int_0^{\infty} 2xe^{-2x} dx$

c) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^3}$

Viel Spaß beim Lösen. ☺