Vorlesung 13.10.21

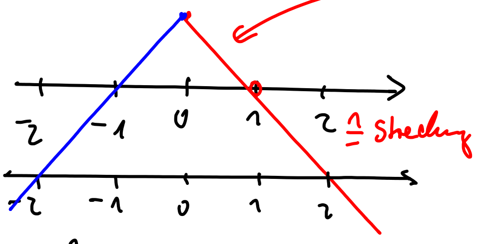
Komplexe Zahlen

Sinn: sehr sehr nützliches Rechenhilfsmittel

Motivation: Erweiterung der reellen Zahlen $\mathbb{N} \in \mathbb{Z} \in \mathbb{Q} \in \mathbb{R} \in \mathbb{C}$

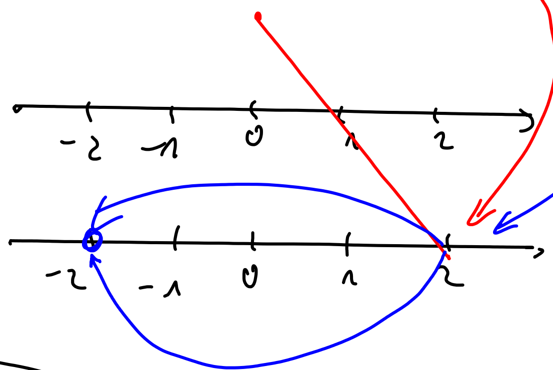
zuerst reelle Zahlen: Multiplikation z.B. „2" mit 1 oder −1;

z.B. „−2" mit 1 $1 \hat{=} 1 \cdot 2 \cdot (-1)$



$\hat{=} 1 \cdot 2$

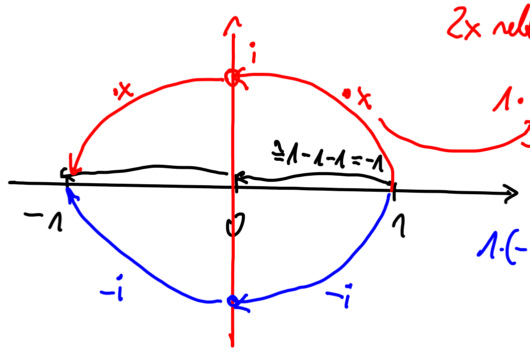
$\hat{=} -1 \cdot 2$ $\quad \hat{=} \quad 1 \cdot x = 2 \Rightarrow x = 2$



≙ Spiegelung um 0

nun gesucht operation das $1 \cdot x \cdot x = -1$

von, 2x selbe Operationen, nach



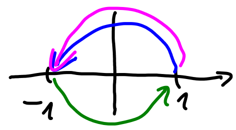
$1 \cdot i \cdot i = -1$; $i^2 = -1$

$1(-i)(-i) = -1$; $(-i)^2 = -1$

$\Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$

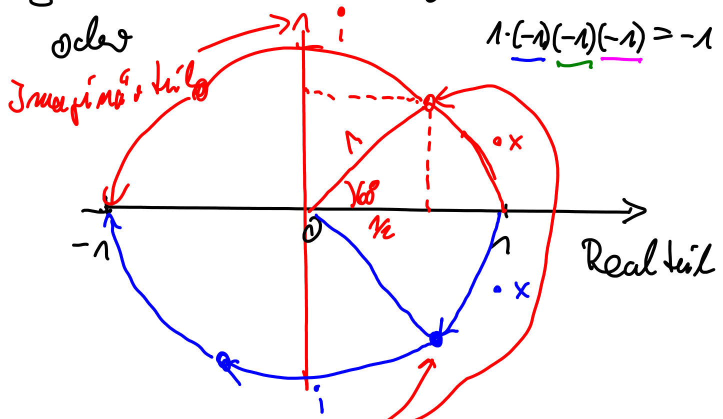
$\sqrt{-1} = x \Rightarrow$ ↗

analog $1 \cdot x \cdot x \cdot x = x^3 = -1$; $\Rightarrow x = -1 \Rightarrow$ $\hat{=}$



$1 \cdot (-1)(-1)(-1) = -1$

oder



$\Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x_1 = -1$

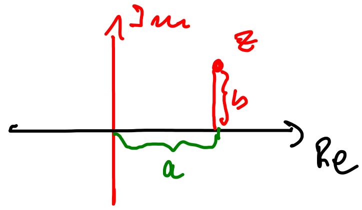
$x_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Komplexe Zahl ≙ Punkt in Gaußscher Zahlenebene, Angabe eindeutig

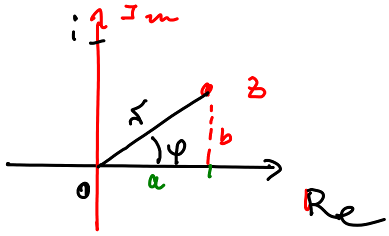
Angabe von z: immer 2 Zahlen

1. karthesische Darstellung von z



$\boxed{z = a + ib}$

$a, b \in \mathbb{R}$; a − Realteil, b − Imaginärteil



2. polare Darstellung

$$\boxed{z = r\cdot\cos\varphi + r\cdot i\cdot\sin\varphi}$$

$r,\varphi \in \mathbb{R}$;

r = absolute Betrag von $z \hat{=} |z|$

φ = Argument von z

$r = \sqrt{a^2+b^2}$

$\varphi = \arctan(a,b)$; $\tan\varphi = \frac{b}{a}$

$$\Updownarrow$$

$a = r\cdot\cos\varphi$; $b = r\cdot\sin\varphi$

3. exponentielle Darstellung (Beweis später)

$$\boxed{z = re^{i\varphi}} \quad \text{weil} \quad \boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi} \;\hat{=}\; e^{z} = \dots \qquad z\in\mathbb{C}$$

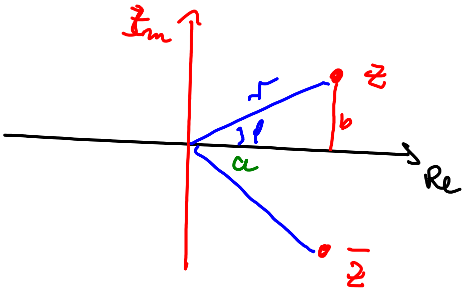
$\hookrightarrow e^{i\pi} = -1$; $e^{i\pi}+1 = 0$

Eulersche Formel

Rechnen mit komplexen Zahlen: Gleichheit $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$

oder $r_1 = r_2$ und $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k; k\in\mathbb{Z}$

Def. konjugiert komplex $\hat{=}$ Spiegelung an reeller Achse



$z = a+ib \Rightarrow \bar{z} = z^* = a-ib$

oder

$z = re^{i\varphi} \Rightarrow \bar{z} = re^{-i\varphi}$

z.B. $z+\bar{z} = 2a = 2\,\mathrm{Re}\{z\}$

$z\cdot\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 \underbrace{-iab+iba}_{0} - iib^2$

$z\cdot\bar{z} = a^2+b^2 = r^2 = |z|^2$

Rechnen analog zu $\mathbb{R}$, mit $i\cdot i = -1 = i^2$, ! $i \neq \sqrt{-1}$ weil $\sqrt{-1} = \pm i$

Summe: $z_1+z_2 = (a_1+ib_1)+(a_2+ib_2) = (a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$

Differenz: $z_1-z_2 = (a_1-a_2)+i(b_1-b_2)$

Produkt: $z_1\cdot z_2 = (a_1+ib_1)\cdot(a_2+ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ia_2b_1 - b_1b_2$

$= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2+a_2b_1)$

oder $z_1\cdot z_2 = r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

Quotienten: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)} = -$

$$= \frac{a_1a_2 - ia_1b_2 + ia_2b_1 + b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$$

$$= \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\, i$$

oder $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

es gilt weiterhin $z_1+z_2 = z_2+z_1$; $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$; $z_1(z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2)z_3$

Bemerkung. größer und kleiner geht nicht also $z_1 > z \mathrel{\hat=}$ Quatsch

Bew. Annahme $i > 0 \Rightarrow i > 0 \quad | \cdot i$

$-1 > 0$ falsch //

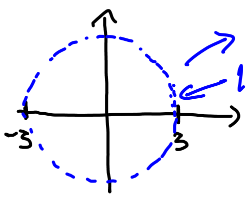
also $i < 0 \Rightarrow i < 0 \quad | \cdot i$

$-1 > 0$ falsch //

da $i < 0$ sein sollte muss Relationszeichen sich umdrehen.

also man kann sagen $|z_1| \gtrless |z_2|$, ist aber nicht eindeutig festgelegtes z_1

es gibt so viele z mit $|z| = $ konst.



auch $|r e^{i\varphi}| = |r| |e^{i\varphi}|$

$|e^{i\varphi}| = |\cos\varphi + i \sin\varphi|$

$= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \ \forall \varphi$