Vorlesung 15.10.21 - Ausblick

nat. Zahlen $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ es gibt ein kleinstes n

ganze Zahlen $k \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ jede Zahl hat Vorgänger und Nachfolger

rationale Zahlen $p \in \mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ jedes p kann als Quotient von 2 ganzen Zahlen dargestellt werden

reellen Zahlen $a \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $a^2 = 2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl
auch gilt $a_1 > a_2$ oder $a_1 < a_2$, nicht $a^2 = -1$

komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ $\quad z^2 = -1 \Rightarrow z = \pm i$; aber $z_1 \geq z_2$ oder $z_1 < z_2$ ist keine Aussage

$z = a + ib$

komplexe Zahlen in Physik, Rechenhilfsmittel bei Schwingungen,
unbedingt in Quantentheorie; z.B. Schrödingergl.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r},t) + V(\vec{r})\cdot\psi(\vec{r},t)$$

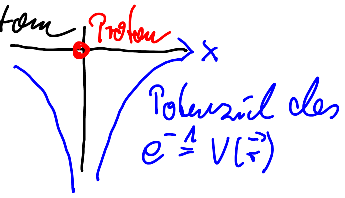
; Bewegung von Teilchen im Potenzial $V(\vec{r})$

Laplace $\hat{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$\psi(\vec{r},t) \hat{=}$ Wellenfunktion

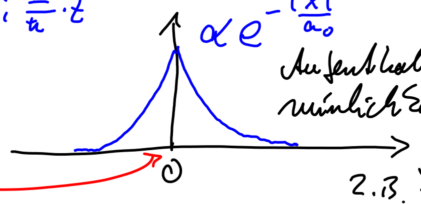
$|\psi(\vec{r},t)| \hat{=}$ Aufenthaltswahrscheinlichkeit von Teilchen

z.B. H-Atom



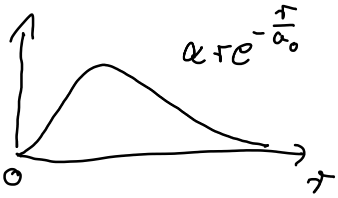
Lsg. $\Rightarrow$ $\psi(|r|,t) \propto e^{-\frac{|r|}{a_0}} \cdot e^{i\frac{E}{\hbar}\cdot t}$

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$ größte Wahrscheinlichkeit am Kern $= x=y=z=0$

mit welcher Wahrscheinlichkeit den Abstand r?



nach komplexen Zahlen: Quaternionen

$x \in \mathbb{H}$ (von Hamilton)

$x = x_0 + x_1 i + x_2 \cdot j + x_3 k$, $x_0, \dots x_3 \in \mathbb{R}$; $i^2 = k^2 = j^2 = ijk = -1$

aber $i \cdot j = +k$ Reihenfolge wichtig

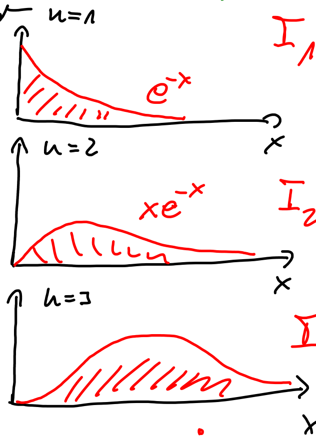
$j \cdot i = -k$

wozu? z.B. Beschreibung von Drehungen in 3D (Spiele)

- Quantentheorie, dort sind Pauli-Matrizen äquivalent zu Quaternionen zur Beschreibung von Spin

Beispiel für partielle Integration ⇒ Verallg. der Fakultät

Betrachten $I_n = \int_0^\infty \underset{f'}{e^{-x}} \cdot \underset{g}{x^{n-1}}\, dx \; ; \; n > 1$ ← Parameter



$I_1 = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$

$I_2 = \int_0^\infty x e^{-x} dx = 1$

$I_3 = \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = 2$

$I_n = [fg] - \int_0^\infty f g' dx$

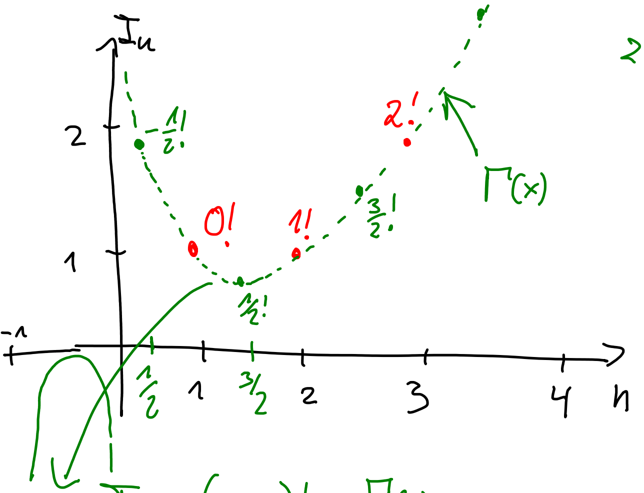
$I_n = \underbrace{\left[-e^{-x} \cdot x^{n-1}\right]_0^\infty}_{0-0=0} + \int_0^\infty e^{-x} (n-1) x^{n-2} dx$

$I_n = (n-1) \int_0^\infty e^{-x} x^{n-2} dx = (n-1) \cdot I_{n-1}$; z.B. $I_3 = (3-1) \cdot I_2 = 2 \cdot 1$

$I_4 = (4-1) I_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

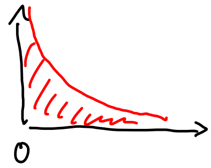
$\boxed{I_n = (n-1) I_{n-1}}$ Rekursionsvorschrift

$I_n = (n-1)!$ Fakultät



Idee rechne I_n auch für $n \notin \mathbb{N}$, also $n \in \mathbb{R}$

z.B. $I_{1/2=n} = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$



$= \sqrt{\pi} = 1{,}77\ldots$

$I_{3/2=n} = \left(\frac{3}{2} - 1\right) \cdot I_{1/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0{,}886\ldots$

$\vdots$

$I_{5/2=n} = \left(\frac{5}{2} - 1\right) I_{3/2}$

Def. $I_x = (x-1)! = \Gamma(x)$

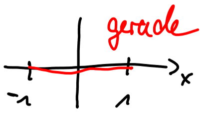
↑ Gamma-Fktion ≙ Verallgemeinerung der Fakultät

geht sogar für $x < 0$ wenn $x \notin \mathbb{Z}$

Wozu ist $\Gamma(x)$ gut? z.B. Volumen oder Oberfläche von Kugeln im n-Dim-Räumen angeben

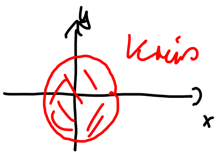
$n=0$; ≙ Punkt • $V = 0$

$n=1$; ≙



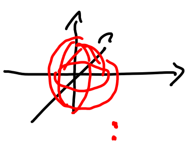
$V = 2r$

$n=2$; ≙



$V = \pi r^2$

$n=3$; ≙



$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

allg.: $V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cdot r^n$

$V_1 = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)} r^1 = 2r$

$V_2 = \frac{\pi}{\Gamma(2)} \cdot r^2 = \pi \cdot r^2$

$V_3 = \frac{\pi^{3/2}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\vdots$

⇒ Volumen in n-Dim für Kugel (stat. z.B. V_K mit $n = 10^{24}$)

Volumen der Einheitskugel $r = 0$

n	V
0	0
1	2
2	$\pi = 3{,}14$
3	$\frac{4}{3}\pi = 4.19$
4	4,93
5	5,26
6	5,17
7	$< 5{,}17$
⋮	⋮

⇒ max. Volumen der Kugel in $D = 5$

analog auch Oberfläche der Kugel in n Dim

$$O = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \cdot r^{n-1}$$

n	O
0	0
1	0
2	2π
3	$4\pi r^2$
⋮	

$O = \max$ für $n = 7$

in 2 D ← F

← ∂U