Alle außer Aufgabe 3 ohne Taschenrechner oder Formelsammlung.

1 Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke

a) $20x^2\frac{3a}{5x} - \frac{a(x+6)}{3} = a\left(\frac{35}{3}x - 2\right)$

b) $\frac{a^2-b^2}{a+b} = a-b$

c) $x^{3k+2}3x^{4k+7}7x^{n-9-7k} = 21x^n$

d) $\left(\frac{x^2y}{u^2v^2}\right)^4 : \left(\frac{xy^3}{u^2v}\right)^2 = \frac{x^6}{u^4v^6y^2}$

e) $(-a)^{-2}a = 1/a$

f) $-a^{-2}a = -1/a$

g) $\sqrt[5]{32y^{10}} = 2y^2$

h) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^{24}}} = x^2$

i) $\frac{x-y}{y-x} = -1$

j) $\frac{2-x}{4-x^2} + \frac{x+1}{x} - \frac{x+4}{x+2} - \frac{2}{x^2+2x} = 0$

k) $\frac{(x^2)^4 - x^{(2^4)}}{x^8} + x^8 = 1$

l) $\frac{x^{6n+2}x^{3-n}}{(x^2)^n(x^{n+3})^2} = x^{n-1}$

2 Gleichungen und Ungleichungen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für $x \in \mathbb{R}$.

a) $\frac{2x-1}{2-x} = \frac{7}{3x+4} \rightarrow x \in \{-3, 1\}$

b) $\frac{x+1}{2x-4} = \frac{x+2}{x-2} \rightarrow x = -3$

c) $2 - 3(7-4x) = 5x - 7 + 2(4x+3) \rightarrow x = -18$

d) $x(x-15)(x+23) = 0 \rightarrow x \in \{0, 15, -23\}$

e) $\frac{6x-1}{3x+2} = \frac{2x}{x-1} \rightarrow x = 1/11$

f) $\log_{10}(3x+4) = 3 \rightarrow x = 332$

g) $|x-1| \leqslant 1 \rightarrow x \in [0, 2]$

h) $\frac{4}{x-3} \leqslant 1 \rightarrow x \in (-\infty, 3) \cup [7, \infty)$

i) $\frac{x}{2x+1} < 2 \rightarrow x \in (-\infty, -2/3) \cup (-1/2, \infty)$

j) $6 + \frac{1}{x+3} < 1 \rightarrow x \in (-16/5, -3)$

k) $\frac{|1-x|}{x+3} \geqslant -2 \rightarrow x \in (-\infty, -7] \cup (-3, \infty)$

l) $\frac{2|x|}{x+3} \leqslant 1 \rightarrow x \in (-\infty, -3) \cup [-1, 3]$

m) $|2x+4| \leqslant x+5 \rightarrow x \in [-3, 1]$

n) $\frac{x^2+2x-12}{x^2+8x+15} \geqslant 1 \rightarrow x \in (-\infty, -5) \cup [-9/2, -3)$

3 Knobeln

a) Von zwei Körpern gleichen Volumens hat der erste die Dichte 7,3 kg/dm^3, der zweite die Dichte 2,7 kg/dm^3. Welche Masse hat der zweite Körper, wenn der erste die Masse 4,8 kg hat?
Lösung:

$$\frac{2.7kg/dm^3}{7.3kg/dm^3}4.8kg \approx 1.78kg \tag{1}$$

b) 15 Kugeln mit einem Umfang von je 70 cm wiegen 6,5 kg. Wieviel wiegen 25 Kugeln aus dem gleichen Material mit einem Umfang von je 60 cm.

Lösung:

$$U = 2\pi R, V = 4/3\pi R^3 \Rightarrow V \propto U^3$$
$$m \propto VN \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{U_1^3}{U_2^3}\frac{N_1}{N_2}$$
$$\Rightarrow m = 6.822kg$$

c) Ein Kapital von 10000 Euro wird für $2\frac{1}{2}$ a mit einer Verzinsung von 4,2 % pro Jahr angelegt, die jährlichen Zinsen werden dem Kapital am Ende des Sparjahres gutgeschrieben und von da an mit diesem verzinst. Auf welchen Betrag wächst das Kapital an? Zu welchem Zinssatz muss Kapital angelegt werden, damit es sich in 20 a verdoppelt?
Lösung:

$$K_{2.5} = 10000 \cdot 1.042 \cdot 1.042 = 10857,64$$
$$K_{20} = 10000 * (1+z)^{20} =^! 2 \cdot 10000 \Rightarrow 1 + z = 2^{1/20} \approx 1.0353$$
$$\Rightarrow z \approx 3.53\%$$

d) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Zahl 100 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden Zahlen zu schreiben. Warum gibt es keine solche Möglichkeit für 1024?
Lösung: Für 100 gibt es zwei Möglichkeiten. $100 = 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$. Fallunterscheidung:

a) Anzahl an Summanden ungerade
$\Rightarrow 100 = u \cdot \underbrace{z}_{\text{Mitte der Zahlenfolge, } z \in \mathbb{Z}}$. Es kommen 5 und 25 in Frage. Bei 25 wäre die Mitte 4 und man kommt unter 0. 5 geht! Mitte 20, $100 = 18+19+20+21+22 = 5 \cdot 20$.

b) Anzahl an Summanden gerade
$\Rightarrow 100 = g \cdot \underbrace{u/2}_{\text{Mitte der Zahlenfolge}}$. Es kommen 5 und 25 in Frage. Bei 5 wäre die Mitte 2.5 und man kommt unter 0. 25 geht! Mitte 12.5, $100 = 9+10+11+12+13+14+15+16 = 8 \cdot 12.5$.

$1024 = 2^{10}$, es gibt keinen ungeraden Teiler!

Viel Spaß beim Lösen. ☺