1 Algebra und (Un-)Gleichungen - Vertiefung

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke bzw. bestimmen Sie die Lösungsmenge.

a) $\sqrt[24]{x^{3^3} / \left(x^{3^2}(x^3)^2\right)}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{2x}{x-2} - \frac{5}{x+3} - \frac{20}{x^2+x-6} - \frac{3}{x^2+3x}$

c) $\dfrac{\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}}$

d) $\ln \sqrt{\mathrm{e}^{3(\ln \mathrm{e}^2 + \ln \mathrm{e}^6)}}$

e) $\sqrt{x+16} - \sqrt{x-12} = 2$

f) $8x^2 - 14x = 9$

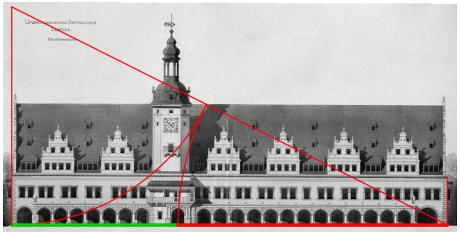
g) $x^4 - \frac{7}{4}x^2 - \frac{9}{8} = 0$

h) $|x+1| + |x+2| \leqslant 2$

i) $\frac{x+2}{x^2-x-2} < -1$

2 Allgemeinbildung: Goldener Schnitt

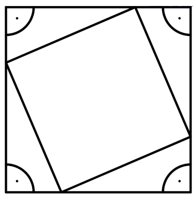
Der goldene Schnitt war schon Euklid in der Antike (300 v.Chr.) bekannt. Viele Bauten und Kunstwerke beruhen auf diesem „angenehmen" Verhältnis zweier Seiten.
Es soll eine Strecke ℓ so in zwei ungleich große Teilintervalle a und $b, a > b$ zerlegt werden, dass das Verhältnis von ℓ zum größeren der beiden Intervalle gleich dem Verhältnis zwischen a und b ist.
Stellen Sie die zugehörige Gleichung auf und berechnen Sie $\Phi = a/b$.
Anmerkung: Das Verhältnis Φ taucht in vielen anderen Zusammenhängen in der Mathematik auf, so gilt auch $\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$

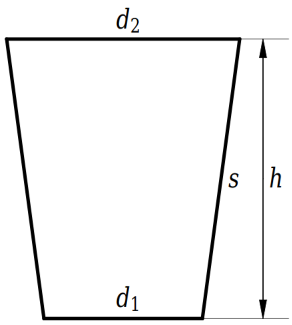


Altes Rathaus in Leipzig Quelle Wikipedia

3 Geometrie und Koordinaten

a) Beweisen Sie mithilfe der Abbildung den Satz des Pythagoras. Berechnen Sie dazu die Gesamtfläche des äußeren Quadrats über zwei Wege und setzen Sie die Ergebnisse gleich.





b) Der in der nebenstehenden Schnittzeichnung dargestellte Abfallbehälter habe die Form eines geraden Kegelstumpfes mit folgenden Maßen: $d_1 = 17\,\text{cm}$, $d_2 = 25\,\text{cm}$, $h = 30\,\text{cm}$. Wie groß ist das Fassungsvermögen in Litern? Wie groß ist die Mantelfläche in Quadratmetern? Wie hoch ist der Materialverbrauch in Quadratdezimetern?
Hinweis: das Kegelvolumen ist $\frac{1}{3}G \cdot h_{\text{Kegel}}$, *G-Grundfläche.*

c) Geben Sie die Punkte (x, y, z) in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) an.

a) $(1,0,0)$
b) $(1,1,0)$
c) $(1,1,1)$
d) $(1,\sqrt{2},0)$
e) $(2,3,4)$
f) $(0,0,0)$

4 Einheiten

Ohne Taschenrechner.

a) Wie setzt sich ein N (Newton) aus den SI-Basiseinheiten zusammen? Aus welchem Gesetz lässt sich die zusammengesetzte Einheit herleiten?

b) Wie setzt sich ein J (Joule) aus den SI-Basiseinheiten zusammen? Aus welchem Gesetz ist dies ersichtlich?

c) Nach dem Coulomb-Gesetz gilt für das elektrische Feld einer Punktladung q im Ursprung

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}\,.$$

Welche Einheit besitzt das elektrische Feld?
Hinweis: Die Einheit des Ortsvektors $\vec{r}$ ist die einer Länge. Die Einheit von ε_0 ist $\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$, die Ladung ist Stromfluss·Zeit.

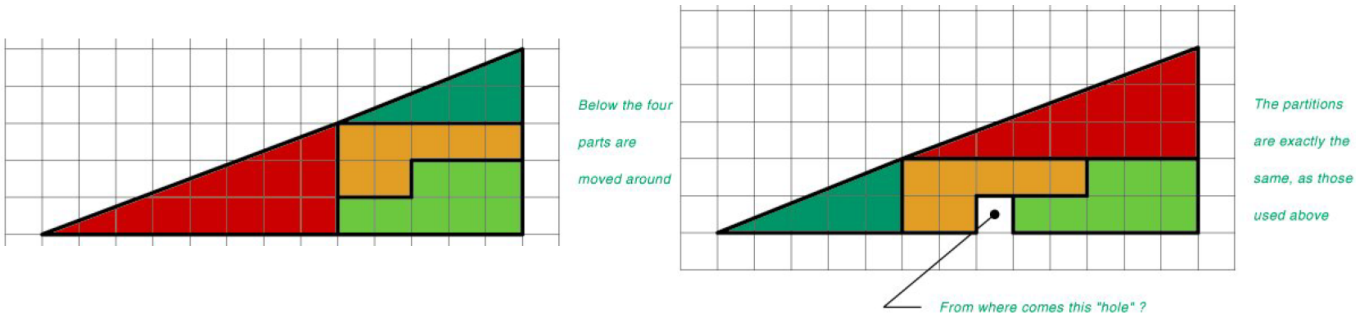
d) Rechnen Sie in dm^2 um.

a) $235\,\mathrm{km}^2$
b) $0{,}287\,\mathrm{m}^2$
c) $342748\,\mathrm{mm}^2$
d) $8{,}342 \cdot 10^4\,\mathrm{mm} \cdot \mathrm{m}$
e) $3{,}648 \cdot 10^{17}\,\mu\mathrm{m}^2$
f) $2\,\mu\mathrm{m} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{dm}/\mathrm{km}$

Rechnen Sie in cm^3 um.

a) $9{,}837 \cdot 10^{19}\,\mathrm{nm}^3$
b) $5{,}32 \cdot 10^4\,\mathrm{ml}$
c) $0{,}0345\,\mathrm{m}^3$
d) $2\,\mu\mathrm{m} \cdot \mathrm{dm} \cdot \mathrm{km}$
e) $4370\,\mathrm{mm} \cdot 1/\mathrm{cm}$
f) $0{,}45\,\mu\mathrm{m}^2/\mathrm{dm} \cdot \mathrm{km}^2/\mathrm{nm} \cdot \mathrm{cm}$

5 Wie kann das sein?



6 Für Freaks: Fibonacci-Folge

Die Folge $(f_n)_{n=0,1,\ldots} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\}$ der Fibonacci-Zahlen ist rekursiv definiert durch $f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n > 1$, siehe auch https://de.wikipedia.org/wiki/Fibonacci-Folge
Zeigen Sie, dass:

a) Für $n \geq 0$ gilt $f_n = \dfrac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_n}{f_{n-1}} = \Phi = \dfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1) \approx 1.618$, das Φ des goldenen Schnittes. Es gilt auch $\Phi = 1 + \dfrac{1}{\Phi}$.

Viel Spaß beim Lösen. ☺