# 1 Algebra und (Un-)Gleichungen - Vertiefung

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke bzw. bestimmen Sie die Lösungsmenge.

a) $\sqrt[24]{x^{3^3} / \left(x^{3^2}(x^3)^2\right)} = \sqrt{x}$

b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2x}{x-2} - \dfrac{5}{x+3} - \dfrac{20}{x^2+x-6} - \dfrac{3}{x^2+3x} = 2$

c) $\dfrac{\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}} = 1$

d) $\ln \sqrt{\mathrm{e}^{3(\ln \mathrm{e}^2 + \ln \mathrm{e}^6)}} = 12$

e) $\sqrt{x+16} - \sqrt{x-12} = 2 \to x = 48$

f) $8x^2 - 14x = 9 \to x \in \{9/4, -1/2\}$

g) $x^4 - \dfrac{7}{4}x^2 - \dfrac{9}{8} = 0 \to x = 3/2$

h) $|x+1| + |x+2| \leqslant 2 \to x \in [-5/2, -1/2]$

i) $\dfrac{x+2}{x^2-x-2} < -1 \to x \in (-1,2)\backslash\{0\}$

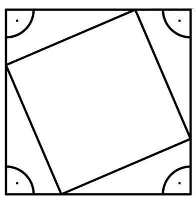
# 2 Allgemeinbildung: Goldener Schnitt

Es gilt: $\ell = a + b$ und wir haben per Definition

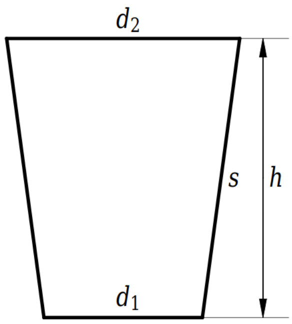
$$\frac{\ell}{a} = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$
$$1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b} \quad \text{mit} \quad \Phi = \frac{a}{b}$$
$$1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi$$
$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \Rightarrow \Phi = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618 = \frac{a}{b}$$

Hinweis: Dies ist nicht unser Papierformat A4,A3,..., dort ist das Verhältnis 1:$\sqrt{2}$. Damit kann man durch Halbieren immer das nächst kleine Format erhalten und das Blatt A0 als Referenz ist einfach definiert mit Fläche A = 1 m$^2$ ☺.

# 3 Geometrie und Koordinaten



a) Beweisen Sie mithilfe der Abbildung den Satz des Pythagoras. Berechnen Sie dazu die Gesamtfläche des äußeren Quadrats über zwei Wege und setzen Sie die Ergebnisse gleich.
großes Quadrat:$(a+b)^2 = 4ab/2 + c^2$:vier Dreiecke und Innenquadrat und somit
$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$ also $a^2 + b^2 = c^2$




b) Der in der nebenstehenden Schnittzeichnung dargestellte Abfallbehälter habe die Form eines geraden Kegelstumpfes mit folgenden Maßen: $d_1 = 17\,\mathrm{cm}$, $d_2 = 25\,\mathrm{cm}$, $h = 30\,\mathrm{cm}$. Wie groß ist das Fassungsvermögen in Litern? Wie groß ist die Mantelfläche in Quadratmetern? Wie hoch ist der Materialverbrauch in Quadratdezimetern?
*Hinweis: das Kegelvolumen ist* $\frac{1}{3}G \cdot h_{\text{Kegel}}$
$V = 10.52\mathrm{l}, M = 0.199672\mathrm{m}^2, O = 22.237\mathrm{dm}^2$

c) Geben Sie die Punkte $(x, y, z)$ in Zylinderkoordinaten $(r, \varphi, z)$ an.

a) $(1, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0)$

b) $(1, 1, 0) \rightarrow (\sqrt{2}, \pi/4, 0)$

c) $(1, 1, 1) \rightarrow (\sqrt{2}, \pi/4, 1)$

d) $(1, \sqrt{2}, 0) \rightarrow (\sqrt{3}, 54.74, 0)$

e) $(2, 3, 4) \rightarrow (\sqrt{13}, 56.31, 4)$

f) $(0, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 0)$

## 4 Einheiten

Ohne Taschenrechner.

a) Wie setzt sich ein N (Newton) aus den SI-Basiseinheiten zusammen? Aus welchem Gesetz lässt sich die zusammengesetzte Einheit herleiten?
2. Newtonsches: $F = m \cdot a \rightarrow [F] = 1kg\frac{m}{s^2}$

b) Wie setzt sich ein J (Joule) aus den SI-Basiseinheiten zusammen? Aus welchem Gesetz ist dies ersichtlich?
Kinetische Energie: $E = \frac{m}{2}v^2 \rightarrow [E] = 1kg\frac{m^2}{s^2}$

c) Nach dem Coulomb-Gesetz gilt für das elektrische Feld einer Punktladung $q$ im Ursprung

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}\,. \tag{1}$$

Welche Einheit besitzt das elektrische Feld?
*Hinweis:* Die Einheit des Ortsvektors $\vec{r}$ ist die einer Länge. Die Einheit von $\varepsilon_0$ ist $\frac{As}{Vm}$. $\rightarrow V/m$

d) Rechnen Sie in $\mathrm{dm}^2$ um.

a) $235\,\mathrm{km}^2 = 2.35 \times 10^{10} dm^2$

b) $0{,}287\,\mathrm{m}^2 = 28.7 dm^2$

c) $342748\,\mathrm{mm}^2 = 34.27 dm^2$

d) $8{,}342 \cdot 10^4\,\mathrm{mm} \cdot \mathrm{m} = 8.342 \times 10^3 dm^2$

e) $3{,}648 \cdot 10^{17}\,\mu\mathrm{m}^2 = 3.648E7 dm^2$

f) $2\,\mu\mathrm{m} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{dm}/\mathrm{km} = 2 \times 10^{-8} dm^2$

Rechnen Sie in $\mathrm{cm}^3$ um.

a) $9{,}837 \cdot 10^{19}\,\mathrm{nm}^3 = 9.837 \times 10^{-2} cm^3$

b) $5{,}32 \cdot 10^4\,\mathrm{ml} = 5.32 \times 10^4 cm^3$

c) $0{,}0345\,\mathrm{m}^3 = 3.45 \times 10^4 cm^3$

d) $2\,\mu\mathrm{m} \cdot \mathrm{dm} \cdot \mathrm{km} = 200 cm^3$

e) $4370\,\mathrm{mm} \cdot \mathrm{l}/\mathrm{cm} = 4.37 \times 10^5 cm^3$

f) $0{,}45\,\mu\mathrm{m}^2/\mathrm{dm} \cdot \mathrm{km}^2/\mathrm{nm} \cdot \mathrm{cm} = 4.5 \times 10^7 cm^3$

## 5 Wie kann das sein?

Beides sind keine „sauberen“ Dreiecke. Nimm das große Unterdreieck, dies hat den Anstieg $3/8 = 0.375$ und dass kleine obere den Anstieg $2/5 = 0.4$. Sollte die Hypotenuse eine Gerade sein, müssen die Anstiege gleich sein.

## 6 Für Freaks: Fibonacci-Folge

**Problem 1(a)** $f_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$ für $n \geq 0$ erfüllen dieselben Rekursionsbedingungen, da $f_o = \frac{1-1}{\sqrt{5}}$ und $f_1 = \frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1$ gilt. Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
2^n\sqrt{5}f_n &= (1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n \\
&= (1+\sqrt{5})^{n-2}(1+\sqrt{5})^2 - (1-\sqrt{5})^{n-2}(1-\sqrt{5})^2 \\
&= (1+\sqrt{5})^{n-2}(2+2\sqrt{5}+4) - (1-\sqrt{5})^{n-2}(2-2\sqrt{5}+4) \\
&= 2(1+\sqrt{5})^{n-1} + 4(1+\sqrt{5})^{n-2} - 2(1-\sqrt{5})^{n-1} - 4(1-\sqrt{5})^{n-2} \\
&= 2(1+\sqrt{5})^{n-1} - 2(1-\sqrt{5})^{n-1} + 4(1+\sqrt{5})^{n-2} - 4(1-\sqrt{5})^{n-2} \\
&= 2^n\sqrt{5}\,f_{n-1} + 2^n\sqrt{5}\,f_{n-2}
\end{aligned}$$

und damit folgt $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. □

**Problem 1(b)** Unterstellt, daß $\Phi = \lim_{n\to\infty} f_n/f_{n-1} > 0$ existiert. Nun gilt

$$\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} = \frac{f_{n+1}+f_n}{f_{n+1}} = 1 + \frac{f_n}{f_{n+1}} = 1 + \frac{1}{f_{n+1}/f_n} \approx \frac{f_{n+1}}{f_n}$$

Unabhängig von den Anfangsbedingungen $f_o$ und $f_1$ folgt dann im Grenzübergang $n \to \infty$

$$1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi \Longrightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \Longrightarrow \Phi = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$$

Die Kettenbruchdarstellung ergibt sich aus $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}}$$

Viel Spaß beim Lösen. ☺