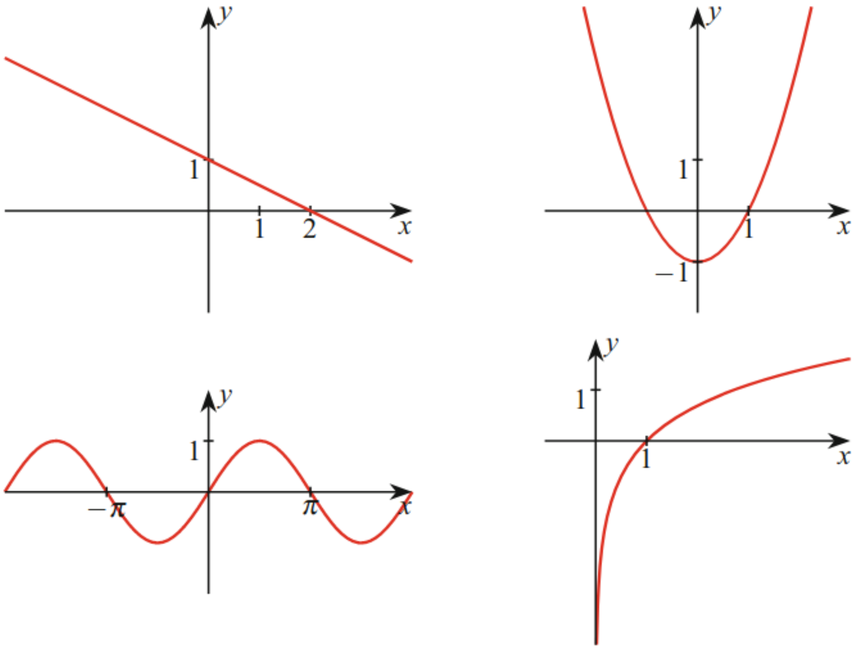
1 Einfache Funktionen

(i) Geben Sie die Gleichungen zu den Funktionen mit den abgebildeten Graphen an. Sind sie injektiv, surjektiv, oder bijektiv auf $\mathbb{R}$? Finden Sie für jede Funktion eine Definitions- und Wertemenge, bezüglich derer die Funktionen bijektiv sind.



Lösung:

a) $-1/2x+1$ bijektiv auf $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
b) x^2-1 bijektiv auf $[0, \inf) \to [-1, \infty]$
c) $\sin(x)$ bijektiv auf $[-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$
d) $\ln(x)$ bijektiv auf $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

(ii) Sei $f(x) = x^2 + 2x - 15$

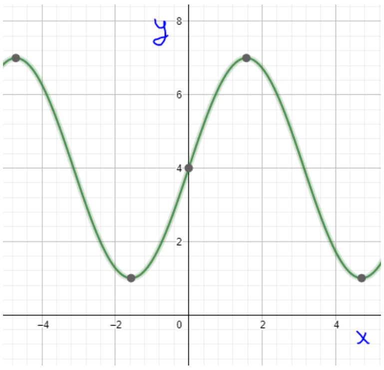
a) Ermitteln Sie Definitionsbereich, Wertebereich und Nullstellen dieser Funktion! $f : \mathbb{R} \to [-16, \infty]$, Nullstellen: $x \in -5, 3$
b) Stellen Sie die Funktion als Produkt zweier linearer Funktionen dar! $f(x) = (x-3)(x+5)$
c) Skizzieren Sie die Funktion!
d) Wo ist die Funktion monoton wachsend, wo ist sie monoton fallend? monoton wachsend für $x \geqslant -1$, fallend $x \leqslant -1$

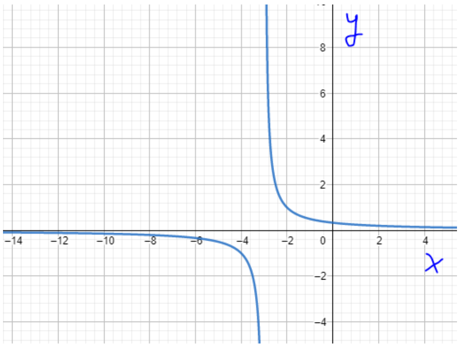
(iii) Skizzieren Sie die folgenden Funktionen und geben Sie ihre Definitions- und Wertebereiche und alle Symmetrieachsen und -punkte an. Sind die Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv als Funktionen von ihrem Definitions- in ihren Wertebereich?

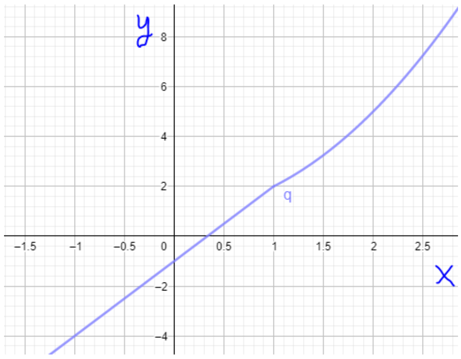
a) $f(x) = 3\sin(x) + 4$ $(\pi z, 4)$ surjektiv, Achsen: Maxima $\pi/2 + 2\pi z$, Minima $3\pi/2 + 2\pi z$, Punkte: Alle Nullstellen des Sinus

b) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ bijektiv, Achsen: $-x-3, x+3$ Punkt: $(0, -3)$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x < 1 \\ x^2+1, & x \geqslant 1 \end{cases}$ bijektiv, keine einfache Symmetrie







(iv) Untersuchen Sie auf einfache Symmetrie, indem Sie $f(-x)$ berechnen.

a) $f(x) = x\sin(x) \rightarrow$ AS

b) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \rightarrow$ AS

c) $f(x) = \dfrac{(x^5 + 4x^3 + 2x)\sin^2(x)}{|x|\cos(x)} \rightarrow$ PS

d) $(x+8)^3 - (x-8)^3 \rightarrow$ AS

e) $(x+8)^2 - (x-8)^2 \rightarrow$ PS

f) $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x) \rightarrow$ PS

Hinweis: Berechnen Sie in f) $f(x) + f(-x)$.

2 Verkettung von Funktionen

Sei $f(x) = 4x^2 - 4x + 4$ und $g(x) = x - 2$. Ermitteln Sie die Funktionen $(f \circ g)(x)$ und $(g \circ f)(x)$ sowie die Definitions- und Wertebereiche von f, g, $f \circ g$ und $g \circ f$.

$f(x) = 4x^2 - 4x + 4 = 4(x - 1/2)^2 + 3 : \mathbb{R} \rightarrow [3, \infty]$

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$(f \circ g)(x) = 4x^2 - 12x + 28 = 4(x - 3/2)^2 + 19 : \mathbb{R} \rightarrow [19, \infty]$

$(g \circ f)(x) = 4x^2 - 4x + 2 = 4(x - 1/2)^2 + 1 : \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty]$

Viel Spaß beim Lösen. ☺