Aufgabe 1: Abschnittsweise definierte Funktionen

Sizzieren Sie die Graphen folgender abschnittsweise definierter Funktionen. Geben Sie die Wertemenge an.

a) $f(x) = \begin{cases} x+2 \text{ für } x<0 \\ 2 \text{ für } 0 \leqslant x < 2 \\ \frac{x^2}{2} \text{ für } x \geqslant 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} |-x-1| \text{ für } x \leqslant 0 \\ \cos(\pi x) \text{ für } x > 0 \end{cases}$

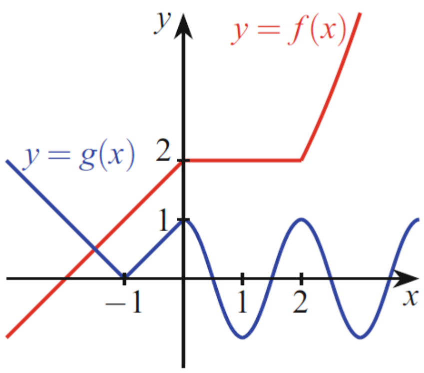
c) $h(x) = \begin{cases} -x^3+3 \text{ für } x \leqslant 1 \\ x^2+1 \text{ für } x > 1 \end{cases}$

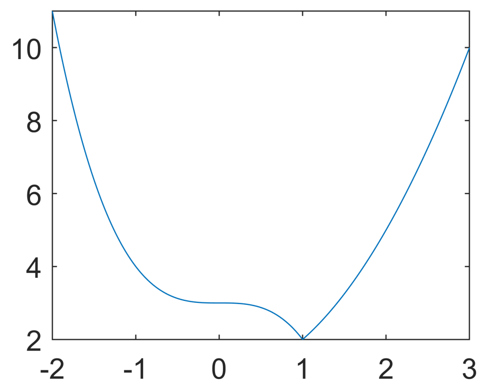
---

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = \pm\infty$, $\mathcal{W} = \mathbb{R}$

b) $-1 \leqslant \cos(\pi x) \leqslant 1$ und $|x+1| \geqslant 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} |x+1| = \infty$, also $\mathcal{W} = [-1, \infty)$

c) tiefster Punkt von $-x^3+3$ liegt beim höchsten Wert von x, da monoton fallend.
$\Rightarrow \min(-x^3+3) = 2$, für x^2+1 liegt das globale Minimum bei 0, aber für Werte $x > 0$ ist die Funktion monoton wachsend. Deswegen liegt das Infimum bei $x = 1$ und ist 2. Zusammen $\mathcal{W} = [2, \infty)$





Aufgabe 2: Zusammengesetzte und verkettete Funktionen

(i) Berechnen Sie für folgende Funktionen f, g jeweils die Abbildungsvorschriften von $f+g, f-g, f \cdot g, \frac{f}{g}$. Bestimmen Sie jeweils auch den maximalen Definitionsbereich.

a) $f(x) = x-2; g(x) = 1-2x$

$(f+g)(x) = -x-1, D_{f+g} = \mathbb{R}$
$(f-g)(x) = 3x-3, D_{f-g} = \mathbb{R}$
$(f \cdot g)(x) = -2x^2+5x-2, D_{f\cdot g} = \mathbb{R}$
$\frac{f}{g}(x) = \frac{x-2}{1-2x}, D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

b) $f(x) = \sin(x); g(x) = \cos(x)$

$(f+g)(x) = \sin(x)+\cos(x), D_{f+g} = \mathbb{R}$
$(f-g)(x) = \sin(x)-\cos(x), D_{f-g} = \mathbb{R}$

$(f \cdot g)(x) = \sin(x)\cos(x), D_{f \cdot g} = \mathbb{R}$
$\frac{f}{g}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, D_{\frac{f}{g}} = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

c) $f(x) = x^2 - 1; g(x) = x - 1$

$(f + g)(x) = x^2 + x - 2, D_{f+g} = \mathbb{R}$
$(f - g)(x) = x^2 - x, D_{f-g} = \mathbb{R}$
$(f \cdot g)(x) = x^3 - x^2 - x + 1, D_{f \cdot g} = \mathbb{R}$
$\frac{f}{g}(x) = \frac{x^2-1}{x-1}, D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - 1$

d) $f(x) = \sqrt{1+x}; g(x) = \sqrt{x}$

$(f + g)(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{x}, D_{f+g} = [0, \infty)$
$(f - g)(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x}, D_{f-g} = [0, \infty)$
$(f \cdot g)(x) = \sqrt{x + x^2}, D_{f \cdot g} = [0, \infty)$
$\frac{f}{g}(x) = \sqrt{\frac{1+x}{x}}, D_{\frac{f}{g}} = (0, \infty)$

(ii) Bestimmen Sie geeignete Funktionen f und g, für die $h = g \circ f$ gilt.

a) $h(x) = \ln(x+1)$ b) $h(x) = \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2$ c) $h(x) = \cos^2(x)$

---

a) $g(x) = \ln(x)$, $f(x) = x + 1$
b) $g(x) = x^2$, $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$
c) $g(x) = x^2$, $f(x) = \cos(x)$

(iii) Gegeben sind die Funktionen f, g, h mit
$f(x) = x^2, \ \ g(x) = \sqrt{x}, \ \ h(x) = \frac{1}{x}$
Bestimmen Sie die Abbildungsterme folgender Funktionen. Vereinfachen Sie die Funktionsterme weitmöglichst. Wie groß ist jeweils der maximale Definitionsbereich?

a) $g \circ f$ und $f \circ g$

$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = |x|, D_{g \circ f} = \mathbb{R}$
$(f \circ g)(x) = \sqrt{x}^2 = x, D_{f \circ g} = [0, \infty)$

b) $f \circ (g + h)$

$= (\sqrt{x} + \frac{1}{x})^2 = x + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$
$D = (0, \infty)$

c) $h \circ (f \cdot g)$

$= \frac{1}{x^2\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$
$D = (0, \infty)$

d) $f \circ (g \circ h)$

$$= \sqrt{\frac{1}{x}}^2 = \frac{1}{x}, D = (0, \infty)$$

Aufgabe 3: Kurvendiskussion

(i) Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen ohne Taschenrechner. Bestimmen Sie die Wertemenge.

a) $y = |\sin(x)|$
$\mathcal{W} = [0, 1]$

b) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$
$\mathcal{W} = (0, \infty)$

c) $y = e^{\cos(x)}$
$\mathcal{W} = [1/e, e]$

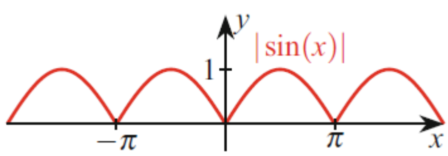
d) $y = x + |x - 1|$
$\mathcal{W} = [1, \infty)$

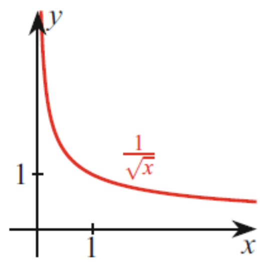
e) $y = \frac{x-1}{x+1}$
$\mathcal{W} = \mathbb{R} \backslash \{1\}$

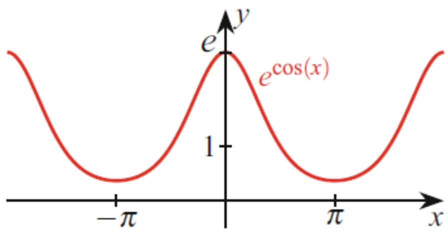
f) $y = \ln(4 - x^2)$
$\mathcal{W} = (-\infty, \ln(4))$

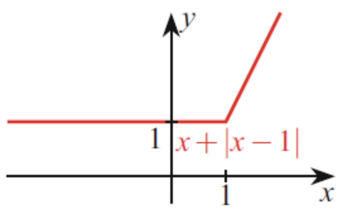
Zu e): Man betrachtet das Grenzverhalten. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x-1}{x+1} \overset{x \neq 0}{=} \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1 - 1/x}{1 + 1/x} = 1^{\mp}$
Für $x > 0$ gilt offensichtlich $1 - 1/x < 1 + 1/x$ und für $x < 0$ umgekehrt.
$\lim\limits_{x \to -1^{\pm}} \frac{x-1}{x+1} = \mp\infty$. Denn $x - 1 < 0$ und $x + 1 < 0$ falls $x < -1$ und andernfalls umgekehrt.

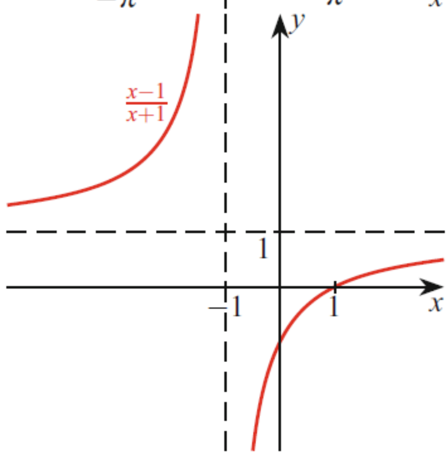
Zu f): $\lim\limits_{x \to \pm 2^{\mp}} \ln(x) = -\infty$

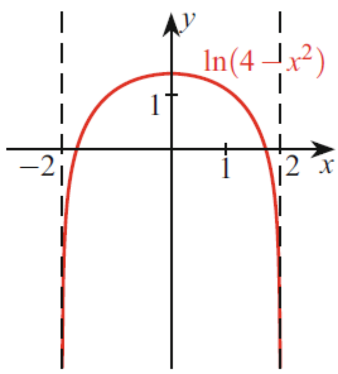












(ii) Untersuchen Sie folgenden Funktionen auf Periodizität und Beschränkheit.

a) $\frac{5}{6}\sin(7x+8)$

a) sin hat kleinste Periodenlänge 2π.

$$\sin(7x+8) = \sin(7x+8+2\pi) = \sin\left(7(x+\frac{2}{7}\pi)+8\right),$$
$$\frac{5}{6}\sin(7x+8) = \frac{5}{6}\sin\left(7(x+\frac{2}{7}\pi)+8\right),$$
$$f(x) = f(x+\frac{2}{7}\pi): \quad \text{periodisch mit kleinster Periode } \frac{2\pi}{7}$$

$$-1 \le \sin(7x+8) \le 1$$
$$-\frac{5}{6} \le \quad f(x) \quad \le \frac{5}{6} \qquad \text{Grenzen werden angenommen, z.B. } f\left(\frac{\frac{\pi}{2}-8}{7}\right) = \frac{5}{6}$$
$$|f(x)| \le \frac{5}{6}, \text{ also beschränkt, kleinster Funktionswert } -\frac{5}{6}, \text{ größter Funktionswert } \frac{5}{6}.$$

b) $\frac{1}{4+\sin(x)}$

$$\text{c) } f(x) = \frac{1}{4+\sin(x+2\pi)} = \frac{1}{4+\sin x} = f(x), \text{ also periodisch mit kleinster Periode } 2\pi.$$

$$\begin{array}{ccccc} -1 & \le & \sin x & \le & 1 \\ 3 & \le & 4+\sin x & \le & 5 \\ \frac{1}{3} & \ge & \frac{1}{4+\sin x} & \ge & \frac{1}{5} \end{array} \qquad \text{Grenzen werden angenommen}$$
$$|f(x)| \le \frac{1}{3}, \text{ also beschränkt, kleinster Funktionswert } \frac{1}{5}, \text{ größter Funktionswert } \frac{1}{3}.$$

(iii) Bestimmen Sie alle Nullstellen, Minima, Maxima und Wendepunkte der Funktion

$$f(x) = x^3 - 39x - 70$$

und skizzieren Sie diese.

Bei x^3 gibt es zwar eine komplizierte Formel. Es lohnt sich aber vielmehr eine Nullstelle zu raten. $x = -2 \Rightarrow -8+78-70 = 0$. Die anderen findet man durch Polynomdivision. $(x^3-39x-70) : (x+2) = x^2-2x-35 = (x+5)(x-7)$

Ableitung: $3x^2 - 39 = 0$, also Extrema : $\pm\sqrt{\frac{39}{3}} = \pm 3.61$

Wendepunkt :0