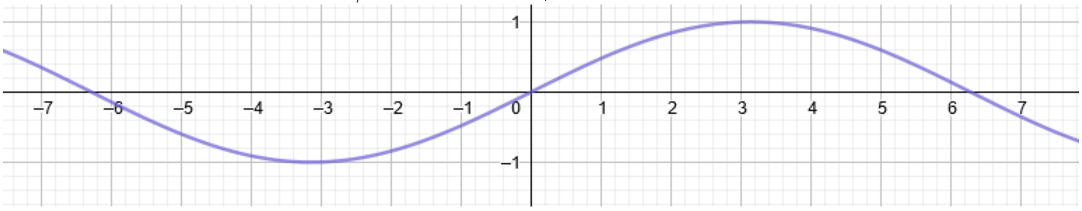
1 Graphen trigonometrischer Funktionen

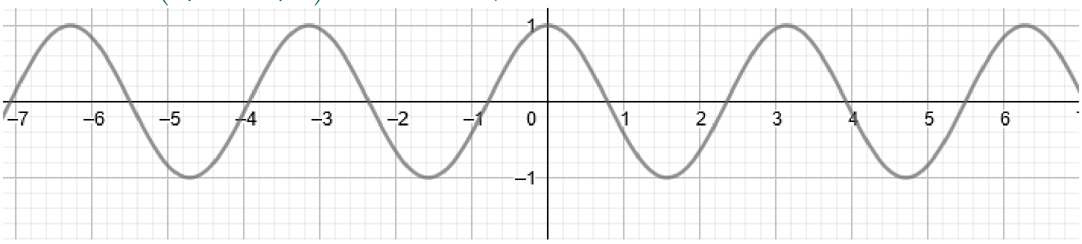
Berechnen Sie Stützstellen und zeichnen Sie den Graphen.

a) $\sin(x/2)$
Nullstellen: $2z\pi$ mit $z \in \mathbb{Z}$, Maxima: $4z + 1$



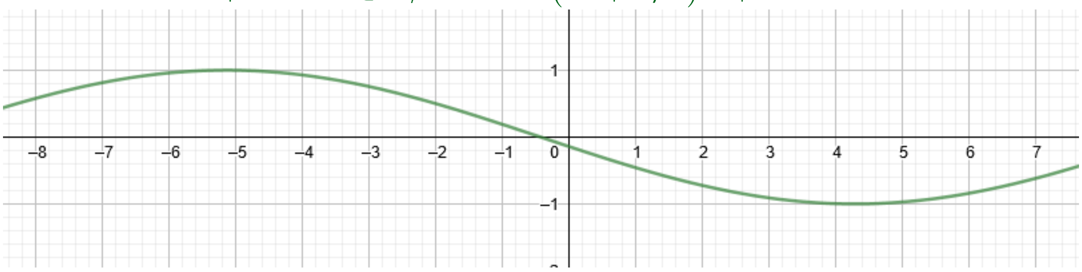
Streckung in x um 2.

b) $\cos(2x)$
Nullstellen: $(z/2 + 1/4)\pi$ mit $z \in \mathbb{Z}$, Maxima: $4\pi z$



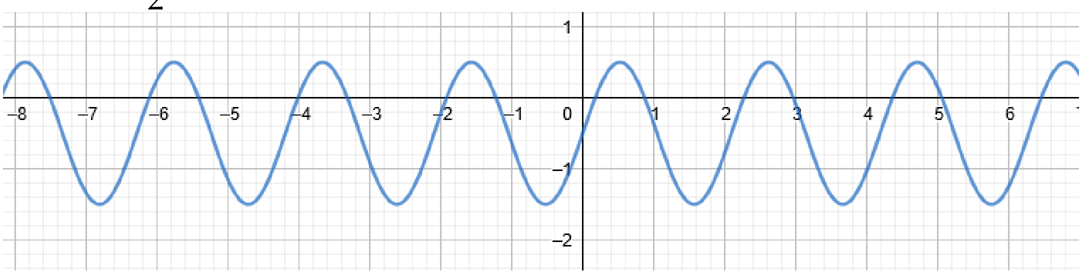
Stauchung in x um 1/2.

c) $\sin\left(\frac{x}{3} - 3\right)$
Nullstellen: $3z\pi + 9$ mit $z \in \mathbb{Z}$, Maxima: $(6z + 3/2)\pi + 9z$



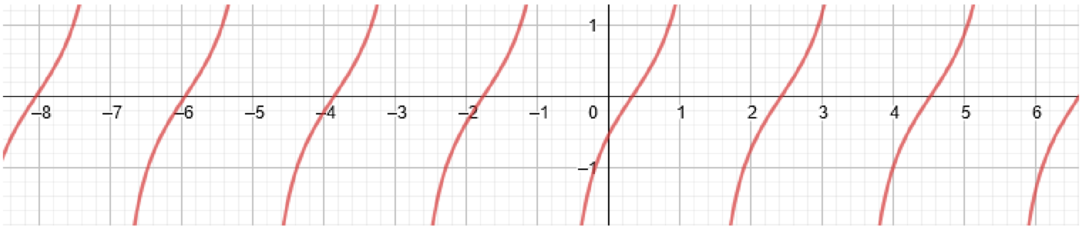
Stauchung in x um 1/3, Verschiebung um 9 in negativer x-Richtung.

d) $\sin(3x) - \frac{1}{2}$

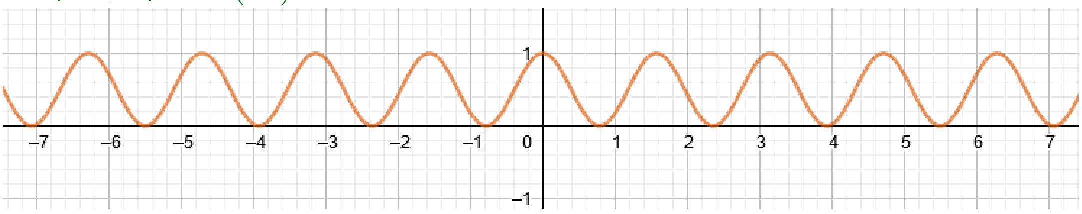


Stauchung in x um 1/3, Verschiebung um -1/2 in y-Richtung.

e) $\tan(1.5x - 1) + 3$
Nullstellen: $(2/3\pi z + 2/3)$, Polstellen: $2/3 + (2/3z + 1/3)\pi$



f) $\cos^2(2x)$
$= 1/2 + 1/2\cos(4x)$



Hinweis: Verwenden Sie zur Vereinfachung in f) ein Additionstheorem (siehe Aufgabe 2).

2 Additionstheoreme

Gegeben seien die Additionstheoreme

$$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$$
$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$$

und $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$.

(i) Berechnen Sie unter Verwendung der Beziehungen und ohne Taschenrechner

a) $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$
$1/2$

b) $\cos(2a)$ ohne Sinus im Ergebnis
$1/2 + 1/2\cos(2a)$

c) $\cos^2\left(\frac{3}{8}\pi\right)$
$1/2 - 1/\sqrt{8}$

d) $1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$
$1/\sqrt{2}$

e) $\dfrac{1}{\tan^2(\pi/8) + 1}$
$1/2 + 1/\sqrt{8}$

f) $\cot^2(3\pi/8) - 1$
$-2/(\sqrt{2} + 1)$

(ii) Zeigen Sie unter Verwendung der obigen Beziehungen, dass gilt

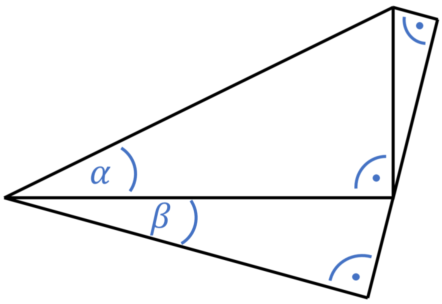
a) $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$

b) $\cot(x \pm y) = \dfrac{\cot(x)\cot(y) \mp 1}{\cot(y) \pm \cot(x)}$

wobei $\cot(x) = \dfrac{1}{\tan(x)}$.
Ausschreiben und erweitern.

3 Geometrie der Additionstheoreme

Zeigen Sie die Gültigkeit der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus aus Aufgabe 2 anhand des abgebildeten, aus rechtwinkligen Dreiecken zusammengesetzten Körpers.

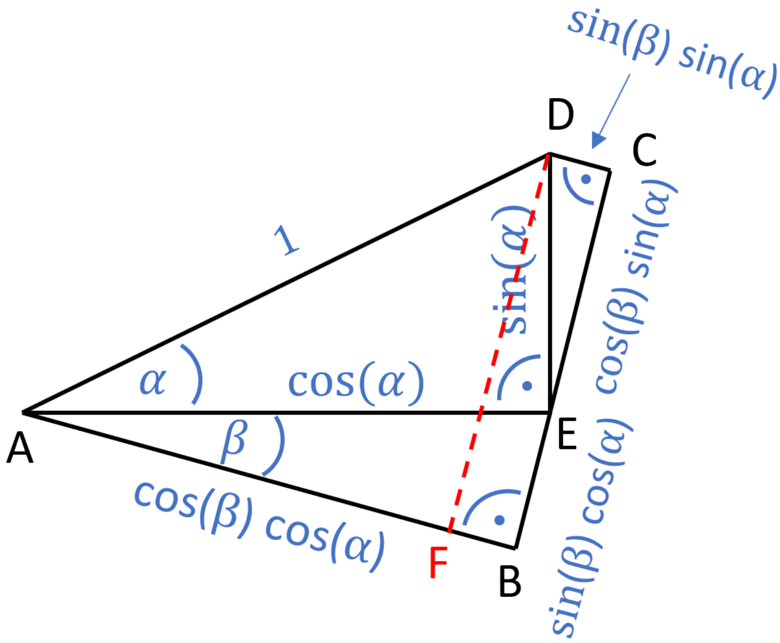


Zur Vereinfachung setzen wir $\overline{AD} = 1$. So finden wir $\overline{AB} = \cos\beta\cos\alpha$, $\overline{BE} = \sin\beta\cos\alpha$, $\overline{EC} = \cos\beta\sin\alpha$ und $\overline{CD} = \sin\beta\sin\alpha$. Damit gilt

$$\overline{AB} - \overline{CD} = \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha = \overline{AF}$$
$$\overline{AB} - \overline{CD} = \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha = \overline{BC}$$

und erkennen weiterhin, dass im Dreieck AFD gilt:

$$\cos(\alpha+\beta) = \overline{AF}$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \overline{BC}$$



Viel Spaß beim Lösen. ☺