1 Koordinatensysteme und Analytische Geometrie

(i) In kartesischen Koordinaten des $\mathbb{R}^2$ sei der Vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = -\hat{e}_x + 2\hat{e}_y$. Mit den Einheitsvektoren $\hat{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\hat{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben. Berechnen Sie die Polarkoordinaten (r, φ) und drücken Sie den Vektor aus als $\vec{r} = r\hat{r}$ mit dem Einheitsvektor

$\hat{r} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$.

(ii) Gegeben seien die Punkte $A(-1, 12, 5)$, $B(1, 2, 5)$, $C(6, 12, 5)$. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mittels Kreuzprodukt.

(iii) Berechnen sie das Volumen des Spats, welcher durch die Ortsvektoren von $A(-1, 2, 1)$, $B(1, 0, 3)$ und $C(2, 2, 1)$ aufgespannt wird.

(iv) Unter welchem Winkel schneiden sich die Geraden im $\mathbb{R}^2$

a) $y = 3x - 7$ und $y = 7x - 3$ b) $y = 3x - 7$ und $y = 7x + 14$

(v) Ermitteln Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der Geraden

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(vi) Berechnen sie die Schnittmenge der Ebenen.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \vec{x} = 5$$

2 Vektorrechnung

Beweisen Sie die folgenden Zusammenhänge.

a) $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$

b) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$ (BAC-CAB-Regel)
und zeigen Sie somit $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ (Jacobi-Identität).

c) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a}\vec{b})(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{a}\vec{a})(\vec{b}\vec{b})$ (Spezialfall der Lagrange-Identität)
und zeigen Sie damit, dass $|\vec{a} \times \vec{b}| = A$, dem Flächeninhalt ist. Verwenden Sie den Kosinussatz und die Winkelformel.

Viel Spaß beim Lösen. ☺