# Vorlesung komplexe Zahlen II 20.10.22

wir hatten $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \Leftrightarrow e^x, \sin x, \cos x \ldots$ selbe Funktionsklasse

besonders wichtig für Schwingungen und Wellen

$$\underbrace{e^{i(a+b)}}_{\downarrow} = e^{ia}\cdot e^{ib} = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)$$

$$\cos(a+b) + i\sin(a+b) = (\cos a\cdot\cos b - \sin a\sin b) + i(\sin a\cos b + \cos a\sin b)$$

Realteile und Imaginärteile gleich $\Rightarrow$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \quad \hat{=} \text{ Additionstheoreme}$$
$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

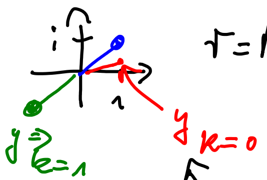
Funktion von komplexen Zahlen als Argument

$$z = a+ib = r\,e^{i\varphi} = r\,e^{i(\varphi+2\pi k)}\ ;\ k\in\mathbb{Z}$$

$$z^n = (a+ib)^n = r^n e^{in\varphi}\ ;\ \text{speziell } \frac{1}{i} = i^{-1} = \frac{1}{i}\cdot\frac{-i}{-i} = \frac{-i}{-1\cdot i^2} = -i = \frac{1}{i}$$

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\,e^{i\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)}$$

Bsp: $y = \sqrt{z}\ ;\ z = 1+i$ $\qquad r = \sqrt{2}\ ;\ \varphi = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$




$$y = \sqrt{\sqrt{2}}\cdot e^{i\frac{\pi}{8} + k\cdot\pi}$$

$$y = \sqrt[4]{2}\,(\cos 22{,}5^\circ + i\sin 22{,}5^\circ)$$

$$\approx 1{,}098 + 0{,}455\,i \qquad \text{oder} \approx -1{,}098 - 0{,}455\,i$$

$$e^z = e^{a+ib} = e^a\cdot e^{ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\ ;\ \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\ ,\ \ldots$$

$$\ln z = \ln\left(r\,e^{i(\varphi+2\pi k)}\right) = \ln r + i(\varphi + 2\pi k)$$

speziell Fkt.

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z} \quad \hat{=} \text{ Riemannsche Zetafunktion}$$

$$\text{z.B. } \zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

auch für komplexe z - Definiert

wenn Re{z} $\underset{\uparrow\ NS}{\text{alle}}$ auf $\frac{1}{2}$ dann \$1.000.000

andere Zugang zu komplexen Zahlen als spezielle 2×2 Matrizen

$$z = a + ib = a\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{\mathbb{E}} + b\underbrace{\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{\mathbb{I}}$$

z.B. $\mathbb{I}\cdot\mathbb{I} = \mathbb{I}^2 = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot 0 - 1\cdot 1 & 0(-1) + (-1)\cdot 0\\ 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 1\cdot(-1) + 0\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = -\mathbb{E}$

! Matrizen multiplizieren oft $A\cdot B \neq B\cdot A$

$$z_1\cdot z_2 = \left[\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -b_1\\ b_1 & 0\end{pmatrix}\right]\cdot\left[\begin{pmatrix}a_2 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -b_2\\ b_2 & 0\end{pmatrix}\right] = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)$$

$$= \begin{pmatrix}a_1a_2 & 0\\ 0 & a_1a_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a_1\cdot 0 + 0 b_1 & -a_1b_2\\ a_1b_2 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -b_1a_2\\ b_1a_2 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-b_1b_2 & 0\\ 0 & -b_1b_2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}a_1a_2 - b_1b_2 & 0\\ 0 & a_1a_2 - b_1b_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -a_1b_2 - b_1a_2\\ a_1b_2 + a_2b_1 & 0\end{pmatrix}$$

$$= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) = z_1\cdot z_2$$

zu zeigen wäre $z_1\cdot z_2 = z_2\cdot z_1$

---

Wie geht es weiter? generell jede Erweiterung hat Nachteile

| | | |
|---|---|---|
| nat. Zahlen | $n\in\mathbb{N}$ | – es gibt ein kleinstes $n$ |
| ganze –"– | $k\in\mathbb{Z}$ | – jede Zahl hat Vorgänger/Nachfolger |
| rationale –"– | $\rho\in\mathbb{Q}$ | – jedes $\rho$ als Quotient von 2 ganzen Zahlen |
| reelle –"– | $a\in\mathbb{R}$ | $\to a^2 = 2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}$, aber $a^2 = -1$ geht nicht |
| komplexe –"– | $z\in\mathbb{C}$ | $z^2 = -1 \Rightarrow z = \pm i$ aber $z_1 > z_2$ oder $z_2 > z_1$ sinnlos |

Quaternionen $x\in\mathbb{H}$ (Hamilton) $x_{0,\dots,3}\in\mathbb{R}$ & $i^2 = j^2 = k^2 = -1$

aber $i\cdot j = +k$
$j\cdot i = -k$

wozu
in $\mathbb{C}$ möglich $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$
$a^4 + b^4 = (\dots)(\dots)(\dots)(\dots)$

nicht geht $a^2+b^2+c^2+d^2 = ( \dots ) \cdot ( \dots )$

hier dann $x \cdot \bar{x} = (x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k)(x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k)$

$$i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{i\frac{\pi}{2}\cdot i} = e^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^{\pi}}} \in \mathbb{R}$$