Komplexe Zahlen

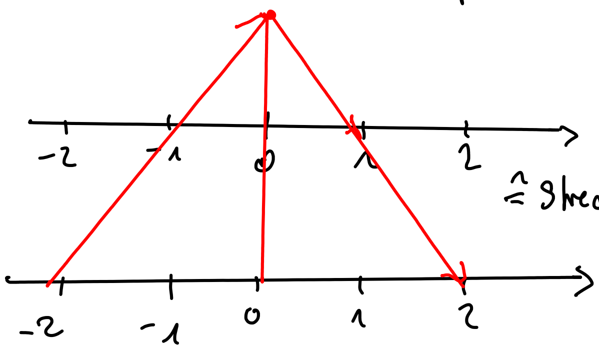
Sinn??: sehr nützliches Rechenhilfsmittel
unbedingt notwendig in QM, Schrödinger gl.

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x} + V(x)\psi(x,t)$$

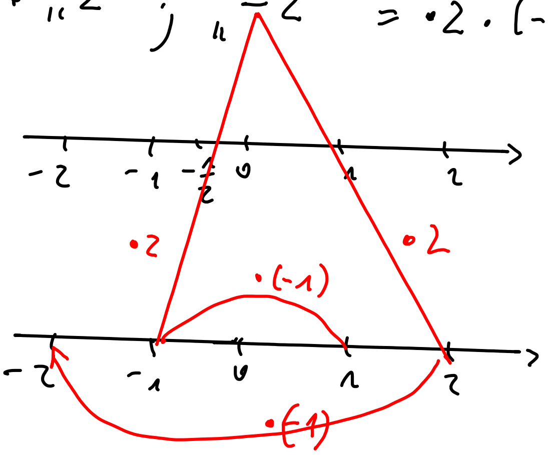
Physik $|\psi|^2 \hat{=}$ Aufenthaltswahrscheinlichkeit

Motivation: Erweiterung der reellen Zahlen $\mathbb{N} \in \mathbb{Z} \in \mathbb{R} \in \mathbb{C}$

zuerst reelle Zahlen: Multiplikation mit „2"; „-2" $= \cdot 2 \cdot (-1)$



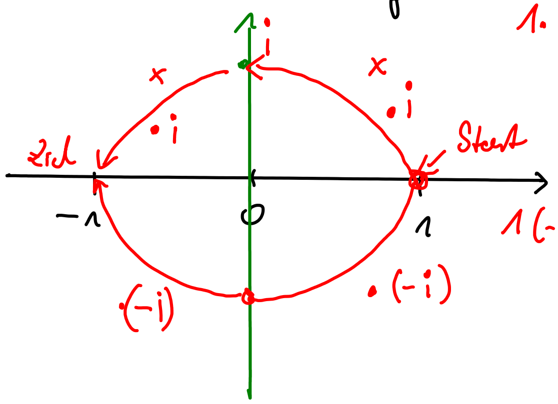
$\hat{=}$ Streckung



wollen nun etwas machen, dass

$1 \cdot x \cdot x = -1$ Frage

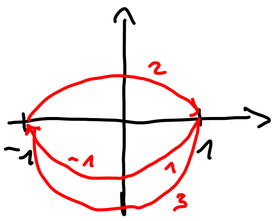
$1 \cdot i \cdot i = -1$; $i^2 = -1$

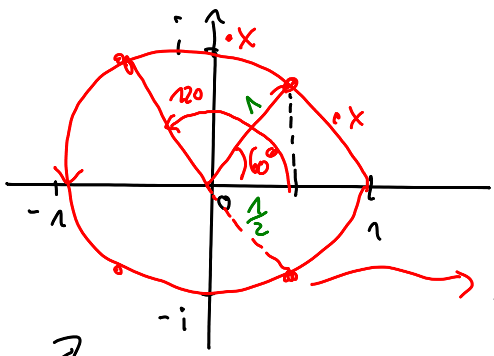


$x^2 = -1 \Leftrightarrow x = \pm i$

$1(-i)(-i) = -1$;

analog $1 \cdot x \cdot x \cdot x = x^3 = -1$ $\quad x_1 = -1 \hat{=}$





$x_2 = \cos 60° + i \sin 60°$

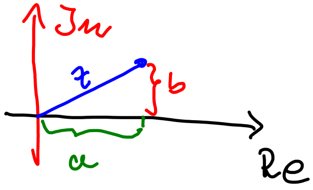
$x_2 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_3 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$

Gaußsche Zahlenebene $\hat{=}$ Punkt in $\mathbb{R}^2$, eindeutig

Multiplikation $\hat{=}$ Drehung in der Gaußschen Zahlenebene

Angabe von z: brauchen zwei Zahlen



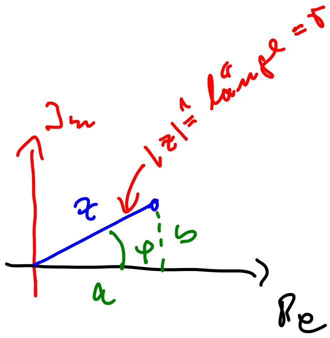
1. kartesische Darstellung

$$\boxed{z = a + ib}$$

a - Realteil von z
b - Imaginärteil z $\Big\} \in \mathbb{R}$

speziell wenn $b = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$

2. polare Darstellung



$$\boxed{z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$; $\varphi = \arctan(a,b)$; $\tan\varphi = \frac{b}{a}$

$\Updownarrow$

$a = r\cos\varphi$; $b = r\sin\varphi$

3. exponentielle Darstellung (Beweis später)

$\boxed{z = r e^{i\varphi}}$ weil $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Eulersche Formel $\Rightarrow$ $\boxed{e^{i\pi} = -1}$ oder $e^{i\pi} + 1 = 0$

Bem. $e^{i(\pi+2\pi)} = -1$

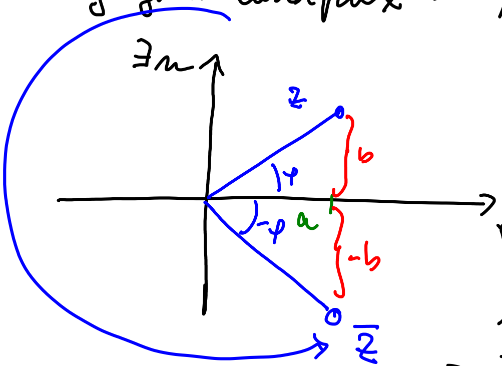
$e^{i(\varphi+2\pi)} = e^{i\varphi}$

Rechnen: Gleichheit

$z_1 = z_2 \overset{\text{g.d.w.}}{\Leftrightarrow} a_1 = a_2 \;\&\; b_1 = b_2$

oder $r_1 = r_2 \;\&\; \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

konjugiert komplex $\hat{=}$ Spiegelung an reeller Achse



$z = a + ib \Rightarrow \bar{z} = a - ib$

oder

$z = r e^{i\varphi} \Rightarrow \bar{z} = r e^{-i\varphi}$

wozu

$z + \bar{z} = 2a = 2\,\mathrm{Re}\{z\}$;

$z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 \underbrace{-iab + iab}_{0} + \underbrace{(ib)(-ib)}_{+b^2}$ $\qquad i \cdot i = -1$

$= a^2 + b^2$

$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = r^2$

Rechnen analog zu $\mathbb{R}$ mit $i \cdot i = -1 = i^2$

Summe : $z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

Differenz : $z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$

Produkt : $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + i a_1 b_2 + i b_1 a_2 - b_1 b_2$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

oder

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} ;$$

Winkel addieren sich

$r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$

$i\varphi_2 \in \mathbb{C}$

$e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib}$

Quotient: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} \cdot \frac{a_2 - ib_2}{a_2 - ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{a_2^2 + b_2^2}$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \cdot i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

logo, es gilt $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$; $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$; $z_1(z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) z_3$

Bem. größer und kleiner macht kein Sinn

Bew. Annahme $i > 0$ dann $i > 0 \quad | \cdot i$

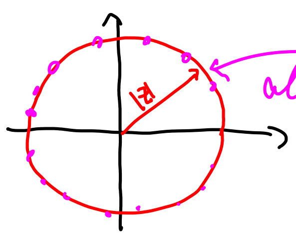
$-1 > 0$ ↯

$\Rightarrow$ $i < 0$ dann $i < 0 \quad | \cdot i$! $i < 0 \Rightarrow$ aus < wird >

$-1 > 0$ ↯

aber man kann $|z_1| > |z_2|$ angeben, da ja $\{|z_1|, |z_2|\} \in \mathbb{R}$

nicht mehr eindeutig da ∞-viele z mit $|z|$ existieren



auch weil

$$|r e^{i\varphi}| = |r| \, |e^{i\varphi}| = r \quad \forall \varphi$$

1

Bew, dass $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Taylorreihe
$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$$
$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots$$
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$e^{i\varphi} = 1 + \frac{i\varphi}{1!} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \dots$$
$$= 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} - i\frac{\varphi^5}{5!}$$

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

analog
$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{\overbrace{\cos\varphi + \cos(-\varphi)}^{2\cos\varphi} + \overbrace{i\sin\varphi + i\sin(-\varphi)}^{0}}{2}$$

$\cos(-\varphi) = \cos\varphi$

$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$

$$= \cos\varphi$$

auch $\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \sin\varphi$ Nachrechnen

vergleiche $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ deswegen heißt diese Def $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ cosh

$\sinh x = \frac{e^{-x} - e^{-x}}{2}$ $\quad x \in \mathbb{R}$