

Alle außer Aufgabe 3 ohne Taschenrechner oder Formelsammlung.

## 1 Elementare Algebra - Vereinfachen Sie

a)  $\frac{(t^2-4t+4)(4+t^2+4t)}{(t^2-4)}$

b)  $\frac{13}{9} - \frac{1}{63} - \frac{21}{49}$

c)  $\frac{3a}{b} : \frac{a}{2b} \cdot \frac{2a}{3b}$

d)  $\left(\frac{x^3 \cdot y}{n^2 \cdot m^3}\right)^5 : \left(\frac{x \cdot y^2}{n \cdot m^5}\right)^2$

e)  $\sqrt{\left(\sqrt{\sqrt[5]{a^2}}\right)^4 \sqrt{b^3}}$

f)  $\left(\frac{\sqrt[5]{\sqrt{7x}}}{\sqrt[4]{x^3}}\right)^{-2}$

Lösung:

a)  $\frac{(t-2)^2(t+2)^2}{(t-2)(t+2)} = t^2 - 4$

b)  $\frac{91-27-1}{63} = 1$

c)  $\frac{4a}{b}$

d)  $\frac{x^{13}y}{n^8m^5}$

e)  $a^{2/5}b^{3/4}$

f)  $\frac{x^{11/10}}{7^{-1/5}}$

## 2 Gleichungen und Ungleichungen - Bestimmen Sie die Lösungsmenge

a)  $8x - (5x + 2) = 3 - (5 - 2x)$

b)  $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

c)  $x^2 - 2x - 10 \leq 5$

d)  $-2x^4 + 2x^3 - 14x + 10 > 4 - 7x + x^3(1 - 2x)$

e)  $\frac{x-1}{|x+4|} < 1$

Lösung:

a)  $x = 0$

b)  $x = \pm 1$

c)  $x \in [-3, 5]$

d)  $\Leftrightarrow x^3 - 7x + 6 > 0$

$$x^3 - 7x + 6 = (x - 2)(x + 3)(x - 1) \rightarrow \mathcal{L} = ]-3, 1[ \cup ]2, +\infty[ \quad (1)$$

e)  $x \in \mathbb{R}$

## 3 Elementare Geometrie

Bestimmen Sie das Volumen sowie die Oberfläche des abgebildeten Körpers in Abhängigkeit von  $a$ . Er ergibt sich aus Subtraktion einer Kugel mit Radius  $\frac{a}{2}$  von einer Pyramide mit Höhe  $\frac{a}{2}$ . Der Mittelpunkt der Kugel liegt in der Pyramidenspitze. **Hinweis:** Mehrere solcher Pyramiden können zu einem einfachen größeren Körper zusammengefügt werden. Das Volumen einer Kugel mit Radius  $R$  ist  $\frac{4}{3}\pi R^3$ .

Lösung:

Aus sechs der Pyramiden lässt sich ein Würfel zusammensetzen. Dieser umschließt die Kugel komplett. Das gesamte Kugelvolumen kann dann subtrahiert werden.

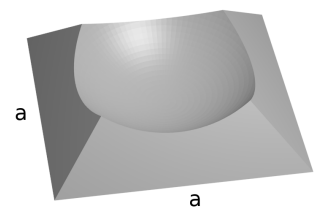
$$V_{\text{Würfel}} = a^3 \Rightarrow 6 \cdot V_{\text{Koerper}} = a^3 - \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \left(1 - \frac{\pi}{6}\right) a^3 \Rightarrow V_{\text{Koerper}} \approx 0,079a^3$$

Die gekrümmte Fläche berechnet sich aus der Kugeloberfläche zu  $\frac{1}{6}4\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{6}$

Die Grundfläche ist  $a^2$ . Eine der Seitenflächen ist die Dreiecksfläche weniger einem Kreissegment. Der Winkel des Kreissegments beträgt  $\tan \phi/2 = \frac{a/2}{a/\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \phi \approx 70,53^\circ$ . Für die Fläche des Segments gilt:

$$A_{\text{Segment}} = \frac{\phi}{360^\circ} \cdot \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \approx 0,154a^2$$

Also ist die Seitenfläche:  $\frac{a}{2} \frac{a}{\sqrt{2}} - A_{\text{Segment}} \approx 0,2a^2$  und folglich die Oberfläche  $A = 0,8a^2 + a^2 + \frac{\pi}{6}a^2 \approx 2,32a^2$



## 4 Winkelfunktionen ohne Taschenrechner

a)  $\sin(-\pi/4)$                       b)  $\cos\left(\frac{11}{2}\pi\right)$                       c)  $\sin\left(\frac{104\pi}{13}\right)$

Lösung:

a)  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$                       b) 0                      c) 0

## 5 Funktionen - Skizzieren Sie

a)  $y(x) = 3x + 2$                       b)  $y(x) = 3x^2 - 2$                       c)  $A(t) = 5 \sin(0.5t + 135^\circ)$

Lösung: c) Nullstellen:  $(2n - 1 - 1/2)\pi$ , Maxima:  $(4n - 1/2)\pi$

## 6 Gleichungssysteme - Lösen Sie

$x - 2y - z = 0$ ;  $x + 3y + z = -1$ ;  $-x + 2z = 1 - 2y$

Lösung:  $x = -1/5$ ;  $y = -3/5$ ;  $z = 1$

## 7 Differenzieren Sie

a)  $f(x) = \frac{1}{x^3}$                       b)  $f(x) = \sqrt{x^5}$                       c)  $f(x) = \cos\left(\frac{1-x^2}{x}\right)$

## 8 Integrieren, Berechnen Sie

a)  $\int (x^3 - 3x + 4) dx$                       b)  $\int \sin(x/4 + 3) dx$                       c)  $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$

Lösung:

$$c) [\sin(\ln(x))]_1^e = \sin(1) - \sin(0) = \sin(1) \quad (2)$$

## 9 Geometrie im Raum

Begründen Sie rechnerisch, dass das Viereck  $ABCD$  mit  $A = (-2, -1)$ ,  $B = (2, -2)$ ,  $C = (4, 1)$ ,  $D = (0, 2)$ , ein Parallelogramm ist. Lösung:

$$B - A = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = C - D \text{ und } C - A = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0 \quad (3)$$

Viel Spaß beim Lösen. ☺