Alles ohne Taschenrechner oder Formelsammlung.

1 Elementare Algebra - Vereinfachen Sie

a) $\dfrac{(t^2-6t+9)(9+6t+t^2)}{(t^2-9)}$

Binomische Formeln.
$$= \frac{(t-3)^2(t+3)^2}{(t-3)(t+3)} = (t-3)(t+3) = t^2-9$$

b) $5 - \dfrac{9}{20} - \dfrac{11}{4}$

Brüche auf gleichen Nenner bringen.
$$= \frac{100}{20} - \frac{9}{20} - \frac{55}{20} = \frac{36}{20} = \frac{9}{5}$$

c) $\dfrac{3a}{b} \cdot \dfrac{a}{2b} : \dfrac{2a}{3b}$

Sortieren nach Zähler und Nenner.
$$= \frac{3a^2 3b}{2b^2 2a} = \frac{9a}{4b}$$

d) $\left(\dfrac{x^2 \cdot y}{n \cdot m^3}\right)^3 : \left(\dfrac{x \cdot y^2}{n^2 \cdot m^2}\right)^4$

Sortieren nach Zähler und Nenner.
$$= \frac{x^6 y^3 n^8 m^8}{n^3 m^9 x^4 y^8} = \frac{x^2 n^5}{y^5 m}$$

e) $\sqrt{\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}\right)^6 \sqrt{b^4}}$

Alle Exponenten zusammenfassen.
$$= a^{\left(2\frac{1}{3}\frac{1}{2}6\frac{1}{2}\right)} b^{\left(4\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)} = a \cdot b$$

f) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{8}x^2}}{\sqrt{x^3}}\right)^{-2}$

Alle Exponenten zusammenfassen.
$$= 8^{\left(\frac{1}{2}\frac{1}{3}(-2)\right)} x^{\left(2\frac{1}{3}(-2)-3\frac{1}{2}(-2)\right)} = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{2}$$

2 Gleichungen und Ungleichungen - Bestimmen Sie die Lösungsmenge

a) $5x - (8x-2) = 4 + (4+3x)$

$$\Rightarrow -3x+2 = 8+3x \Rightarrow -6 = 6x \Rightarrow x = -1$$
$$\Rightarrow \mathcal{L} = \{-1\}$$

b) $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$

Die Gleichung ist quadratisch in x^2.

$\overset{y:=x^2}{\Rightarrow} y^2 - 3y - 10 = 0$

$\Rightarrow y = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{40}{4}}$

$= \frac{3}{2} \pm \frac{7}{2} \Rightarrow y = 5 \vee y = -2$

$\Rightarrow \mathcal{L} = \{\pm\sqrt{5}\}$

c) $x = \sqrt{x+2}$

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $x > 0$.

$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \overset{x \geq 0}{\Rightarrow} x = 2$

$\Rightarrow \mathcal{L} = \{2\}$

d) $x - 14 \geqslant 87 - 2x$

$\Rightarrow 3x \geqslant 101 \Rightarrow x \geqslant \frac{101}{3}$

$\Rightarrow \mathcal{L} = \left[\frac{101}{3}, \infty\right)$

e) $3x^2 + 12x > 15$

$\Rightarrow x^2 + 4x - 5 > 0$

Bestimme Nullstellen.

$x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{4+5}$

$\Rightarrow x = 1 \vee x = -5$

Jetzt ein Blick auf die Ungleichung:

$x = 0 \Rightarrow 0 > 15 \perp$

$x = -6 \Rightarrow 108 - 72 > 15 \top$

$x = 2 \Rightarrow 12 + 24 > 15 \top$

Alternativ: Parabel, Grenzwertbetrachtung $x \to \pm\infty$

Die Lösungsmenge ist damit:

$\mathcal{L} = (-\infty, -5) \cup (1, \infty) = \mathbb{R} \backslash [-5, 1]$.

f) $|2x - 5| \leqslant 3$

Zur algebraischen Auswertung machen wir eine Fallunterscheidung.

1. Fall: $2x - 5 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant \frac{5}{2}$
   $\Rightarrow |2x-5| = 2x - 5$
   $\Rightarrow 2x - 5 \leqslant 3 \Rightarrow x \leqslant 4$
   $x \geqslant \frac{5}{2} \wedge x \leqslant 4 \Rightarrow x \in \left[\frac{5}{2}, 4\right]$
2. Fall: $2x - 5 < 0 \Rightarrow x < \frac{5}{2}$
   $\Rightarrow |2x-5| = 5 - 2x$

$\Rightarrow 5 - 2x \leqslant 3 \Rightarrow x \geqslant 1$
$x > \frac{5}{2} \wedge x \geqslant 1 \Rightarrow x \in [1, \frac{5}{2})$

Es kann Fall 1 oder Fall 2 auftreten.
Fall 1 $\vee$ Fall 2 $\Rightarrow x \in [1, \frac{5}{2}) \cup [\frac{5}{2}, 4] = [1, 4]$

3 Elementare Geometrie

Ein Prisma hat als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 8 cm und ist 5 cm hoch. Berechnen Sie seine Oberfläche.

Die Fläche des gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge a ist $A_D = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}64\text{cm}^2 = \sqrt{3} \cdot 16\text{cm}^2$. Dies ist herleitbar mit dem Satz des Pythagoras. Die Oberfläche setzt sich aus zweimal der Grundfläche und dreimal der Seitenfläche zusammen. Die Seitenfläche ist ein Parallelogramm mit Inhalt $8 \cdot 5\text{cm}^2 = 40\text{cm}^2$. Insgesamt gilt also
$O = \sqrt{3} \cdot 32\text{cm}^2 + 120\text{cm}^2$.
Da wir keinen Taschenrechner verwenden wollen, schätzen wir das Ergebnis ab.
$\sqrt{3} = \sqrt{\frac{192}{64}} \approx \sqrt{\frac{196}{64}} = \frac{14}{8}$ und $\frac{14 \cdot 32}{8} = 56$
Damit ist die Oberfläche etwa $O \approx 176\text{cm}^2$. Das genaue Ergebnis wäre $55,4256...$ statt 56. Unser Fehler bei dem Inhalt der Oberfläche liegt bei $0,33\%$.

4 Winkelfunktionen ohne Taschenrechner

a) $\sin(\pi) = 0$ b) $\cos\left(\frac{5}{2}\pi\right) = 0$ c) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

Wir erinnern uns an die Stützstellen der trigonometrischen Funktionen.

$$\sin(x) = \begin{cases} 0, & x = \pi z \\ 1, & x = \frac{\pi}{2} + 2\pi z \\ -1, & x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi z \end{cases} \quad \cos(x) = \begin{cases} 0, & x = \pi z + \frac{\pi}{2} \\ 1, & x = 2\pi z \\ -1, & x = \pi(2z+1) \end{cases} \quad , z \in \mathbb{Z}$$

5 Funktionen - Skizzieren Sie

a) $y(x) = 2x + 3$ b) $y(x) = 2x^2 - 3$ c) $A(t) = 3\sin(2t - 45°)$

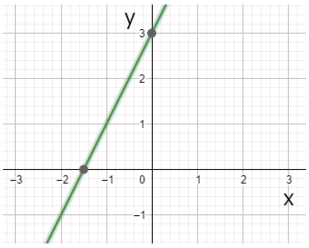
Es sind nur Skizzen gefordert. Detailierte Wertetabellen sind nicht nötig.

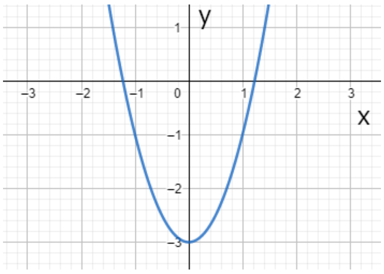
a) Wir berechnen die Nullstelle $x = -\frac{3}{2}$ und den y-Achsenabschnitt $y = 3$. Alternativ betrachten wir die Streckung und Verschiebung von $f(x) = x$.

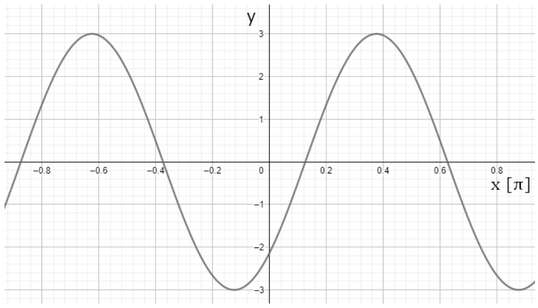
b) Wir berechnen Stützstellen, z.B. für $x \in \{0, -1, 1\}$ oder betrachten die Streckung und Verschiebung von $f(x) = x^2$.

c) Wir berechnen Stützstellen des Sinus, siehe Aufgabe 4. Die Vereinheitlichung zu Radianten ist hilfreich.

$$\sin(2t - \pi/4) = \begin{cases} 0, & 2t - \pi/4 = \pi z \quad \Rightarrow t = \pi/8(1+4z) \\ 1, & 2t - \pi/4 = \frac{\pi}{2} + 2\pi z \quad \Rightarrow t = \pi/8(3+8z) \\ -1, & 2t - \pi/4 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi z \quad \Rightarrow t = \pi/8(7+8z) \end{cases} \quad , z \in \mathbb{Z}$$







Anmerkung zu (c): Zum Zwecke einer Skizze genügt auch die Kenntnis der Nullstellen und eines Extremums. Aus Symmetriegründen ergeben sich weitere Stützstellen. Alternativ ist die Betrachtung der Streckung und Verschiebung zielführend. Die Einheit der x-Achse ist π zur Vereinfachung. Auch dies kann bei Skizzen ausreichen, wenn genauere Zahlenwerte nicht explizit erforderlich sind.

6 Gleichungssysteme - Lösen Sie

$$x - y - z = 0$$
$$x + 3y + z = -1$$
$$-x + 2z = 1 - 2y$$

Zur Lösung eines Gleichungssystems gibt es verschiedene Verfahren. Hier wird das allgemeinste angewandt, welches die Systemmatrix auf Diagonalform bringt.

$$\left\{\begin{array}{ll} x - y - z & = 0 \\ x + 3y + z & = -1 \\ -x + 2z & = 1 - 2y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 5/2 \end{array}\right)$$

Und wir finden $x = 1$, $y = -3/2$, $z = 5/2$. Die Matrixschreibweise ist nicht erforderlich für das manuelle Lösen von Gleichungssystemen. Die Rechenschritte sind die gleichen, jedoch vereinfacht sie die Notation.

7 Differenzieren Sie

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ b) $f(x) = \sqrt{x^3}$ c) $f(x) = \sin\left(\dfrac{1-x^2}{x}\right)$

---

a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{-2} = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$

b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^3} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{3/2} = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin\left(\frac{1-x^2}{x}\right) = \cos\left(\frac{1-x^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1-x^2}{x} = -\cos\left(\frac{1-x^2}{x}\right)\frac{x^2+1}{x^2}$

8 Integrieren, Berechnen Sie

a) $\int 4x^2 + 3x + 1\mathrm{d}x$ b) $\int \sin(0{,}5\,x+1)\mathrm{d}x$ c) $\int_1^\pi \mathrm{e}^{3x} + \ln(x)\mathrm{d}x$

---

a) $= \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + c$

b) $= -2\cos(0,5x+1)$

c) $= \left[\frac{1}{3}e^{3x} + \ln(x)x - x\right|_1^\pi = \frac{e^{3\pi}-e^3}{3} + (\ln(\pi)-1)\,\pi + 1$

9 Geometrie im Raum

Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks ABC mit $A(1,2,3)$, $B(1,0,-2)$, $C(-3,-2,0)$.

Die Fläche ist über das Vektorprodukt gegeben.

$A = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|$

$$\begin{pmatrix}0\\-2\\-5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-4\\-4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-14\\20\\-8\end{pmatrix} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{660}}{2} = \sqrt{165} \approx 12,85$$

Ohne Taschenrechner kann man nur $\sqrt{165}$ angeben oder eine Approximation durchführen. Beispielsweise $\sqrt{169} = 13$.

Viel Spaß beim Lösen. ☺